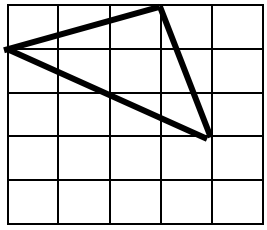
Відкрита математична олімпіада Наукового ліцею № 208 м. Києва

Розв'язання 9 клас

1. Накресліть у зошиті в клітинку **прямокутний** трикутник із площею 5 од^2 вершини якого знаходяться **в вузлах** (точки перетину ліній), а сторони **не паралельні** лініям клітин. (за одиницю виміру обрано довжину сторони клітинки).

Розв'язання: див. рисунок. Неважко обґрунтувати прямий кут і площу трикутника. Є інші приклади.



Критерії:

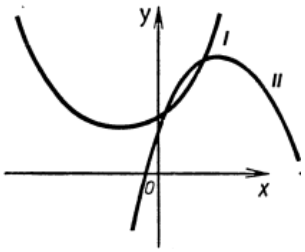
0 – задачу не розв'язано;

7 - задачу розв'язано.

2. Доберіть два натуральні числа a і b, щоб виконувалась рівність (достатньо навести один приклад).

$$\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}=\frac{1}{208}$$

Розв'язання: $\mathrm{b}=\mathrm{a}=416$. Є інші приклади.



Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

7 - задачу розв'язано.

3. На малюнку зображено графіки двох квадратичних функцій $y=ax^2+bx+c$ (I) та $y=mx^2+nx+k$ (II). Порівняйте числа b і n. **Відповідь поясніть.**

Відповідь: $b<n$. **Розв'язання:** Очевидно, $a>0, m<0$, отже $f(x)=ax^2+bx+c-($ $mx^2+nx+k)=(a-b)x^2+(b-n)x+c-k$ квадратична функція з додатним старшим коефіцієнтом $a-b$ і , як видно з графіка двома додатними нулями. А тому їх сума, що дорівнює $-\frac{b-n}{2(a-b)}$ є додатним числом. Звідки маємо, що $b-n<0$ і $b<n$.

4. У ящику лежать 208 кульок чотирьох різних кольорів. Якщо витягнути будь - які 200 кульок, то серед них обов'язково знайдуться чотири кульки різних кольорів. Яку найменшу кількість кульок потрібно витягнути, не заглядаючи в ящик, щоб серед них гарантовано були три кульки різних кольорів? **Відповідь поясніть.**

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

6 або 5 – недостатньо обґрунтовано найменше значення, або приклад не пояснено

7 - задачу розв'язано.

Відповідь: 191. **Розв'язання:** Очевидно, що кожного кольору не менше, ніж 9 кульок (інакше не виконується умова про чотири різні кольори). Також, очевидно, що 190 кульок може не вистачити: наприклад, якщо є по 9 кульок трьох кольорів і 181 кулька четвертого, то взявши ці 181 і ще 9 якогось одного з інших кольорів, не отримаємо трьох різних кольорів. Припустимо, ми взяли 191 кульку і серед них не отримали трьох різних кольорів. Тоді серед тих 17 що залишились мають бути всі кульки якихось двох кольорів, що суперечить тому, що кожного кольору не менше, ніж 9 кульок.

5. У трикутнику ABC сторона AB найбільша. Знайдіть на стороні AB таку точку X, що сума радіусів кіл описаних навколо трикутників CBX і CAX набуває найменшого значення. **Відповідь поясніть.**

На жаль, в умові було припущено помилку і, замість **найменшого** написане **найбільшого** значення. Приносимо свої вибачення учасникам олімпіади. В принципі весь хід розв'язання до останнього кроку – аналіз величини суми радіусів однаковий в обох випадках. Задачу оцінено, якщо розв'язок доведено до цього кроку.

Відповідь: точка X – основа висоти. **Розв'язання:** З теореми синусів радіуси цих кіл дорівнюють $\frac{CX}{2\sin A}$ і $\frac{CX}{2\sin B}$ відповідно. Отже їх сума: $\frac{CX}{2\sin A}+\frac{CX}{2\sin B}=CX\cdot(\frac{1}{2\sin A}+\frac{1}{2\sin B})$ залежіть лише від значення CX яке буде найменшим у випадку якщо CX висота.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

2 – є певні просування в знаходженні суми радиусів

7 - задачу розв'язано.

6. У шуканого числа 10 дільників включаючи 1 і саме число. Сума всіх цих дільників дорівнює 434. Знайдіть всі такі числа. **Відповідь поясніть.**

Відповідь: 208. **Розв'язання:** Відомо, що кількість дільників $d(n)$ числа $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$ дорівнює: $d(n)=(\beta_1+1)(\beta_2+1)\cdot\ldots\cdot(\beta_k+1)$. Отже, оскільки 10 = 1·10, або 10 = 2·5, є дві можливості: або шукане число є 9 – им

степенем простого, або добуток простого числа і четвертого степеня ще одного простого. Перший варіант неможливий, адже навіть $2^9 = 512 > 434$. Припустимо $n = p^4 \cdot q$ тоді $D(n) = \{1, p, q, p^2, p^3, p^4, pq, p^2q, p^3q, p^4q\}$.

За умовою: $1 + p + q + p^2 + p^3 + p^4 + pq + p^2q + p^3q + p^4q = 434$.

$(1 + p + p^2 + p^3 + p^4)(1 + q) = 434 = 2 \cdot 7 \cdot 31$. Оскільки перший множник $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 \geq 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ і множник $1 + q$ не може дорівнювати 2, або 7, або 31 через те, що q просте, маємо єдину можливість $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = 3, 1 + q = 14$. Тому $n = 2^4 \cdot 13 = 208$. Насправді, через те , що $5^4 = 625 > 434$, можна було б обійтись простим перебором випадків p = 2, p = 3.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

3 – є певні просування в знаходженні суми дільників;

7 - задачу розв'язано.