

Відкрита математична олімпіада Наукового ліцею № 208 м. Києва

8 клас

1. Знайдіть два числа, різниця кубів яких дорівнює 208 (достатньо навести один приклад).

Розв'язання: $6^3 - 2^3 = 216 - 8 = 208$.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

7 - задачу розв'язано.

2. Уписати в кожну клітину квадрата 4×4 одну з цифр 2, 0 або 8 таким чином, щоб у кожному квадратику 2×2 була принаймні одна з цифр кожного виду.

Розв'язання:

2	0	8	2
0	8	2	0
8	2	0	8
2	0	8	2

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

7 - задачу розв'язано.

3. Будемо називати число А нижче за число В, якщо сума цифр числа А менша за суму цифр числа В. Наприклад, число 123 нижче, ніж число 7, адже $1 + 2 + 3 < 7$. До того ж називатимемо число «крутим», якщо всі його цифри непарні і серед них немає однакових. Скільки існує «крутих» чисел, які нижче, ніж число 208? **Відповідь поясніть.**

Відповідь: 19. **Розв'язання:** Сума цифр числа 208 дорівнює 10, отже нам потрібні числа з сумою цифр від 1 до 9. Найменша сума трьох непарних цифр $1 + 3 + 5 = 9$, тому існують лише 6 (кількість перестановок з трьох цифр) трицифрових чисел, що задовольняють умову. Також нам задовольняють умову всі одноцифрові непарні, їх 5. З двоцифрових нас влаштовують числа, що складаються з цифр 1 і 3; 1 і 5; 1 і 7; 3 і 5 – їх чотири пари. Отже всього $6 + 5 + 8 = 19$ чисел.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

2 – наведено один два приклади;

4 – принцип підрахунку правильний, але втрачено деякі числа;

6 – бракує якогось з чисел.

7 - задачу розв'язано.

4. Про числа a, b, c, d відомо, що: $a + b = c + d$ і $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Доведіть, що: $a^{208} + b^{208} = c^{208} + d^{208}$.

Розв'язання: з умови за допомогою формули квадрата суми випливає, що

$a \cdot b = c \cdot d$, отже числа a і b , та c і d мають однакову суму і добуток, а тому є коренями одного й того ж самого квадратного рівняння (з точністю до перестановки). З цього і випливає твердження задачі.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

1 – доведено $a \cdot b = c \cdot d$;

2 – доведено рівність сумі кубів або четвертих степенів;

4 – є певні просування в розв'язанні;

7 – задачу розв'язано.

5. Діагоналі вписаного чотирикутника АВСР перетинаються в точці О. Через точку О провели пряму паралельно стороні СР. Доведіть, що ця пряма є дотичною до кола, описаного навколо трикутника АВО.

Розв'язання: кут між цією прямою і діагоналлю АС дорівнює куту АСР (через паралельність) і дорівнює куту АВР (чотирикутник вписаний). За ознакою дотичної з рівності цих кутів випливає, що дана пряма є дотичною.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

7 – задачу розв'язано.

6. У класі 32 учні. Протягом уроку вчитель робив дітям зауваження. Виявилось, що кожному хлопчику вчитель зробив удвічі більше зауважень, ніж кожній дівчинці, а всього – 208 зауважень. Скільки в класі хлопців і по скільки зауважень вони отримали? **Відповідь поясніть.**

Відповідь: 20 хлопців, по 16 зауважень. **Розв'язання:** Нехай в класі x хлопців і $32 - x$ дівчат. Хлопці отримали по $2y$ зауважень, а дівчата по y зауважень. Маємо: $2xy + (32 - x)y = 208$ і тому $y(32 + x) = 208$. Оскільки $32 < 32 + x < 64$ і $208 = 2^4 \cdot 13$,

то $y = 8$, а $32 + x = 52$.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

4 – є певні просування в розв'язанні;

7 – задачу розв'язано.

