

1. Знайдіть два числа, сума квадратів яких дорівнює 208 (достатньо навести один приклад).

Відповідь: $12^2 + 8^2 = 144 + 64 = 208$.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

7 - задачу розв'язано.

2. Уписати в кожну клітину квадрата 3×3 одну з цифр 2, 0 або 8 таким чином, щоб у кожному квадратику 2×2 була принаймні одна з цифр кожного виду.

Відповідь: (існують інші приклади).

2	0	8
8	2	0
0	8	2

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

7 - задачу розв'язано.

3. Скільки існує чотирицифрових номерів (від 0000 до 9999), у яких сума перших двох цифр дорівнює сумі двох останніх? **Відповідь поясніть.**

Відповідь: 670. **Розв'язання:** Для кожного значення суми двоцифрових номерів від 0 до 18 порахуємо кількість двоцифрових номерів з такою сумою. Сума $0 = 0 + 0$ один номер; сума $1 = 0 + 1 = 1 + 0$ – два номери; сума $2 = 2 + 0 = 1 + 1 = 0 + 2$ – три номери і т. д. Неважко порахувати, що з кожною сумою s від 0 до 9 буде $s + 1$ номерів. Отже, для кожного $s + 1$ значення суми перших двох цифр існує $s + 1$ значення суми двох останніх, тобто номерів з сумою s перших двох і останніх двох буде $(s + 1)^2$. Всього буде $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = 385$. Аналогічно, з кожною сумою $10 \leq s \leq 18$ існує $19 - s$ двоцифрових номерів. Отже для s від 10 до 18 номерів з сумою s перших двох і останніх двох буде $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 285$. Всього 670 номерів.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

2 – принцип підрахунку номерів або не враховує деякі з випадків, або деякі враховує кілька разів

4 – правильний принцип підрахунку, але неправильно пораховано числа з сумою перших двох цифр від 10 до 18;

6 – арифметична помилка в розрахунках;

7 - задачу розв'язано.

4. Протягом семестра Дмитро отримував з математики лише оцінки 11 і 12, а одного разу вчитель поставив Дмитру за контрольну оцінку 13. Наприкінці семестра Дмитро порахував суму оцінок із математики й отримав 208. Скільки разів у цьому семестрі Дмитро отримав оцінку 12? **Відповідь поясніть.**

Відповідь: 8. Розв'язання: нехай x оцінок 11 і y оцінок 12. Тоді $11x + 12y = 195$. Оскільки 195 і 12 кратні 3, то x також ділиться на 3. Крім того, x не може бути парним, адже тоді ліва частина рівняння парне число. Очевидно, $x < 18$ тому що $18 \cdot 11 = 198$. Залишається перебрати значення 3, 9, 15, з яких підходить лише $x = 9$. Відповідно $y = 8$.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

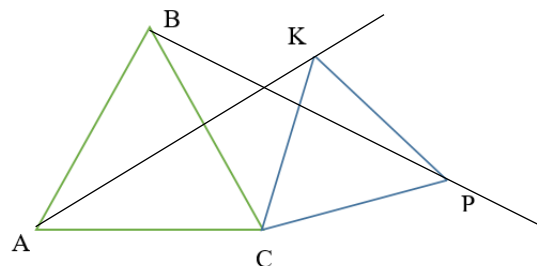
2 – принцип підрахунку номерів або не враховує деякі з випадків, або деякі враховує кілька разів

4 – правильний принцип підрахунку, але неправильно пораховано числа з сумою перших двох цифр від 10 до 18;

6 – арифметична помилка в розрахунках;

7 - задачу розв'язано.

5. Трикутники ABC і PKC рівносторонні зі спільною вершиною C (див. малюнок). Знайдіть кут між прямими AK і BP.



Відповідь: 60. Розв'язання: неважко довести рівність трикутників ACK і BCP за двома сторонами і кутом між ними $\angle ACK = 60 + \angle BCK = \angle BCP$. Тоді $\angle KAC = \angle PBC$ звідки $\angle PBA + \angle KAB = 60 + \angle PBC + 60 - \angle KAC = 120$. Отже в трикутнику ABO: $\angle AOB = 180 - 120 = 60$ (точка O – точка перетину AK і BP)

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

7 - задачу розв'язано.

6. Декілька семикласників приїхали до математичного табору. Під час першої зустрічі виявилось, що кожен із них уже знайомий принаймні з кимось одним із інших за участю в олімпіадах. Семикласник Дмитро спитав у кожного з цих дітей (включаючи себе) про кількість знайомих, а потім перемножив ці числа та отримав у результаті 208. Яка найменша кількість учнів сьомого класу могла бути в таборі? **Відповідь поясніть та наведіть приклад розподілу знайомств.**

Відповідь: 14. Розв'язання: $208 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ тому має бути хоча б один учень, знайомий з 13 іншими. Тоді найменша кількість учнів – 14. Приклад: Один учень A знайомий з кожним з 13 інших, а серед цих 13 є дві пари знайомих один з одним. Інші 9 учнів з цих 13 мають лише одного знайомого A.

Критерії:

0 – задачу не розв'язано;

7 - задачу розв'язано;

2 – не наведено приклад;

4 – немає пояснення чому ця кількість найменша;

6 - невеличкі недоліки.

